

Kapitel 4 Bonus-Material

— Einleitung —

Wünschst du dir manchmal mehr Beispiele, Erläuterungen und Kommentare zu den bewusst kurz gehaltenen Beschreibungen der Lektionen? Dann bist du hier genau richtig! Diese Datei enthält Bonus-Material zu einigen Aktivitäten aus Kapitel 4.

Zu den Rätseln findest du viele Beispiele gelöster Aufgaben sowie zusätzliche Hinweise, wie du selbst welche erstellst. Das Programm Early Family Math beruht auf der Idee, dass frühe Mathematik etwas ist, das eine Familie gemeinsam tun sollte – und Rätsel für dein Kind zu bauen, die ihr zusammen löst, gehört wesentlich dazu. Sobald du bei einem Rätseltyp den Dreh raus hast, wirst du merken, dass sich die meisten, wenn nicht alle Rätsel ziemlich leicht selbst erstellen lassen.

Viele dieser Rätsel gibt es in verschiedenen Schwierigkeitsstufen, und auf den nächsten Seiten findest du zahlreiche Vorschläge und Beispiele, wie du diese Stufen gestaltest. Fang immer mit den einfachsten Rätseln an. Es ist weit besser, wenn dein Kind Erfolg, Verständnis und Freude bei etwas zu leichten Rätseln erlebt, als dass es an zu schweren Aufgaben frustriert, entmutigt und überfordert wird. Erst wenn dein Kind Selbstvertrauen und Begeisterung für eine mathematische Aktivität aufgebaut hat, ist der richtige Zeitpunkt, langsam größere Herausforderungen einzubauen. Außerdem macht nicht jedes Rätsel jedem Kind Spaß – dränge also keine Rätsel und Aktivitäten auf, die einfach nicht zünden.

Das findest du auf den folgenden Seiten:

- **Kapitel 4 – Eingeschlossene Summen**
- **Kapitel 4 – Inselhüpfen – Ausgleichen**
- **Kapitel 4 – Differenzdreiecke und Summendreiecke**
- **Kapitel 4 – Inselhüpfen – Schrittzählen**
- **Kapitel 4 – Reparier es**
- **Kapitel 4 – Inselhüpfen mit Einern und Zehnern**
- **Kapitel 4 – Solitaire Formenrätsel**
- **Kapitel 4 – Summenquadrat**
- **Kapitel 4 – Additionspyramide**
- **Kapitel 4 – Erkundungen**

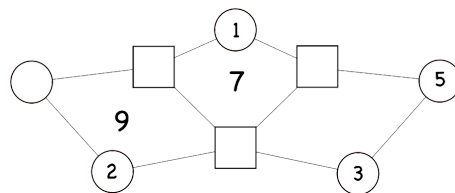
— Rechtliches —

Jede Familie sollte die Möglichkeit haben, gemeinsam Mathematik zu lernen und Freude daran zu haben. Deshalb ist Early Family Math eine Sammlung von Materialien, die Familien und Lehrkräfte frei bearbeiten, übersetzen, kopieren und weitergeben dürfen – ohne um Erlaubnis zu fragen, ausschließlich für nicht-kommerzielle Zwecke.

Kapitel 4 - Eingeschlossene Summen

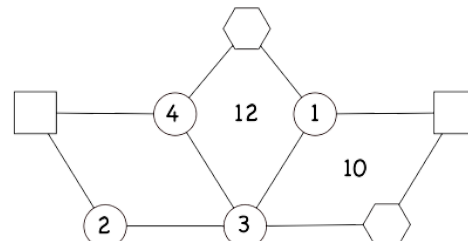
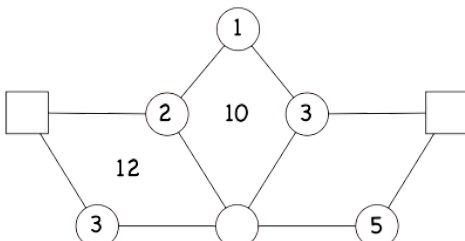
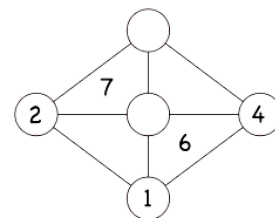
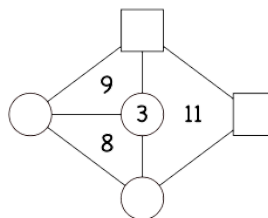
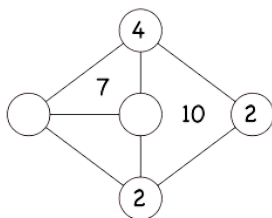
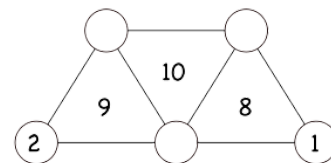
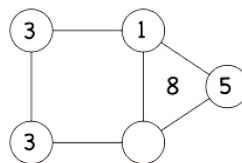
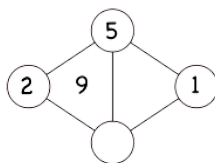
Bei diesen Rätseln sind Formen durch Linien verbunden. In jedem eingeschlossenen Bereich steht eine Zahl, die die Summe der Formen an seinem Rand ist. Wie bei den Formensummen-Rätseln darf ein Kreis jeden beliebigen Wert haben, während der Wert einer nicht-kreisförmigen Form derselbe sein muss wie bei jeder anderen Form desselben Typs. Alle Quadrate müssen also denselben Wert haben, und alle Sechsecke hätten ebenfalls denselben Wert. Du kannst zusätzlich die Regel einführen, dass verschiedene nicht-kreisförmige Formen verschiedene Werte haben müssen – dass zum Beispiel Quadrate und Sechsecke sich unterscheiden müssen.

Die Aufgabe für dein Kind besteht darin, die Zahlen in den Formen und Bereichen herauszufinden, die nicht angegeben sind.



Solche Rätsel erstellst du, indem du eine Zeichnung aus Kreisen und vielleicht ein paar anderen Formen anlegst. Danach trägst du in alle Figuren Zahlen ein und schreibst in jeden umschlossenen Bereich die Summe der Figuren, die ihn umgeben. Zum Schluss entfernst du einige der Zahlen.

Wie bei den Formensummen-Rätseln aus Kapitel 3 fängst du mit einfachen Aufgaben an, bei denen nur eine oder zwei Zahlen fehlen, und steigerst dich langsam zu Rätseln mit mehr fehlenden Zahlen, mehr benachbarten eingeschlossenen Bereichen und mehr Werten in nicht-kreisförmigen Bereichen.



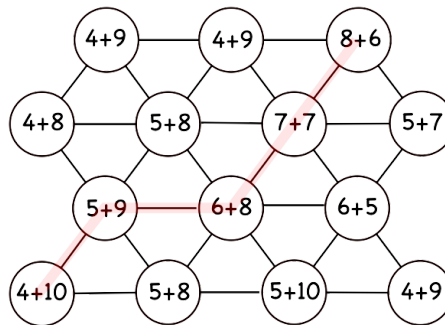
Kapitel 4 - Inselhüpfen – Ausgleichen

Beim Addieren auszugleichen ist ein Weg, Additionsaufgaben deutlich zu vereinfachen. Die Idee: Du nimmst einer der beiden Zahlen etwas weg und gibst es der anderen – das Ergebnis bleibt gleich, aber eine der Zahlen wird bequemer.

Nimmst du zum Beispiel bei $7 + 8$ zwei weg von der 7 und gibst sie der 8, wird daraus $5 + 10$. Nimmst du stattdessen drei weg von der 8 und gibst sie der 7, wird daraus $10 + 5$. Immer wenn du eine der Zahlen zu einem Vielfachen von 10 machen kannst, wird die Aufgabe viel einfacher.

Diese Rätsel üben genau das: aus einer Aufgabe durch Ausgleichen neue Aufgaben zu machen. Die Herausforderung besteht darin, einen Weg zu finden, der alle Inseln mit demselben Ergebnis verbindet. Zwei Inseln dürfen nur verbunden werden, wenn sich die Zahlen ihrer Aufgaben um 1 unterscheiden. Nur ein Teil der Inseln liegt auf dem Weg.

Solche Rätsel baust du, indem du mit etwa zehn Inseln und einigen Verbindungen beginnst. Lege einen Weg von einem Rand der Inselgruppe zum anderen fest. Entlang dieses Weges trägst du Aufgaben ein, die sich jeweils um eins unterscheiden – fang vielleicht mit einer Aufgabe an, bei der 10 addiert wird, und bilde davon Abwandlungen. Auf die Inseln nahe am Weg schreibst du Aufgaben mit kleinen Abweichungen, die andere Ergebnisse haben.

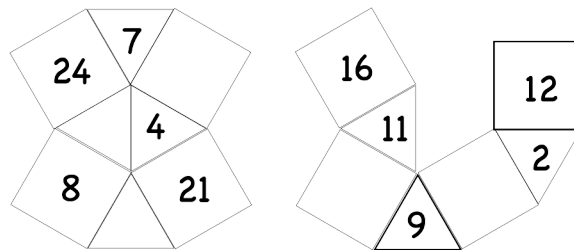


Am Schwierigkeitsgrad dieser Rätsel lässt sich kaum etwas verändern. Falsche Wege einzubauen führt vermutlich eher zu Verwirrung als zu einer echten Herausforderung und ist deshalb meist keine gute Idee.

Kapitel 4 - Differenzdreiecke und Summendreiecke

— Differenzdreiecke —

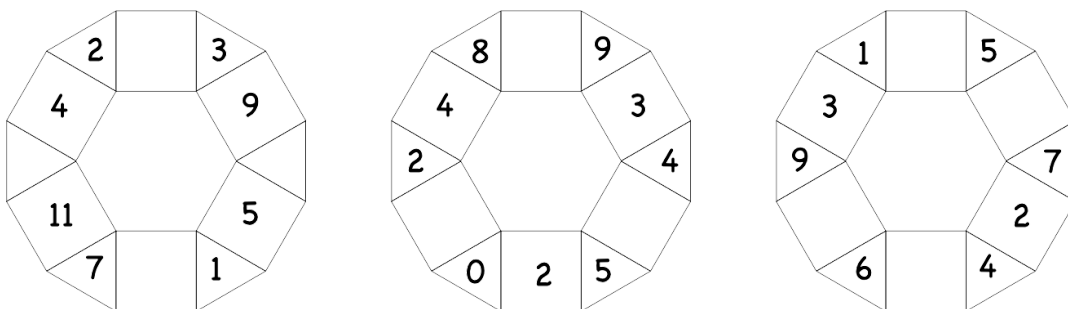
Bei Differenzdreiecken teilen sich Dreiecke und Quadrate ihre Seiten. An einem Dreieck liegen immer genau zwei Quadrate an; an der verbleibenden Seite steht entweder ein Dreieck oder nichts. Die Zahl eines Dreiecks ist die Differenz der beiden angrenzenden Quadrate. Die Herausforderung besteht darin, die fehlenden Zahlen zu ergänzen.



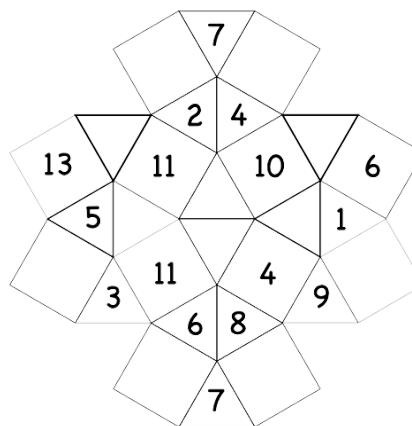
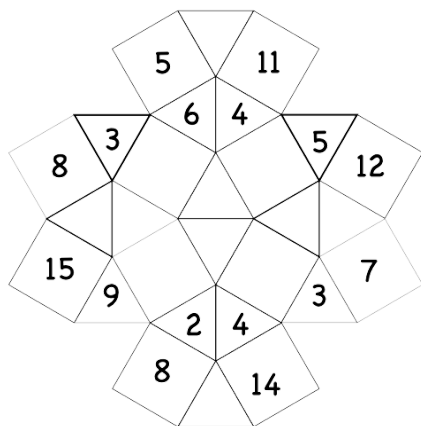
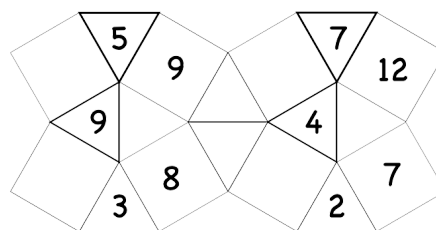
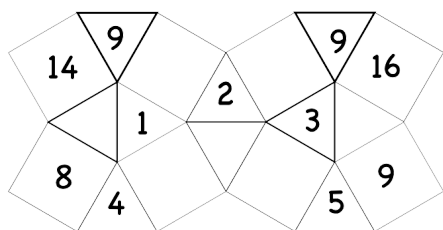
Rätsel erstellen: Rätsel ohne Schleifen zu bauen ist einfach. Zeichne eine abwechselnde Reihe aus Quadraten und Dreiecken, trage an einem Ende Zahlen ein und arbeite dich zum anderen Ende vor. Zum Schluss entfernst du einige Zahlen. Rätsel mit Schleifen oder komplizierteren Verflechtungen sind kniffliger – aber die Mühe lohnt sich, denn dabei entstehen richtig knackige Aufgaben!

Wenn dein Kind damit sehr vertraut ist, möchte es vielleicht selbst neue Rätsel erfinden. Es wird viel Spaß haben und viel lernen, während es herausfindet, wie die Zahlen zusammenpassen.

Lösungsstrategien: Zuerst nimmst du dir alle Dreiecke zwischen zwei ausgefüllten Quadraten vor. Ebenfalls leicht ist ein Quadrat neben einem ausgefüllten Dreieck, an dem ein kleineres ausgefülltes Quadrat liegt – weil wir nicht mit negativen Zahlen arbeiten, gibt es dann nur eine Möglichkeit für das leere Quadrat. Am häufigsten ist der Fall, dass ein Quadrat in der einen Richtung zwei mögliche Werte hat und in der anderen Richtung zwei andere – meist gibt es genau eine Zahl, die in beiden Möglichkeiten vorkommt.

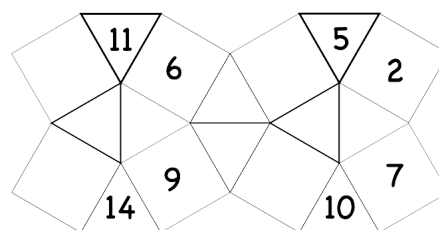
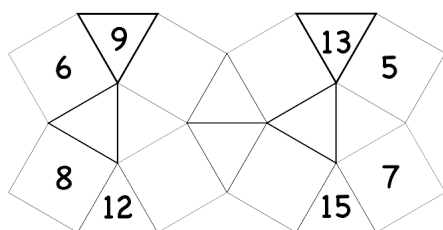
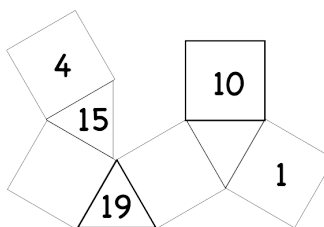
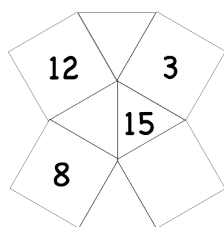


Hier sind einige Beispiele mit vielen Verknüpfungen.



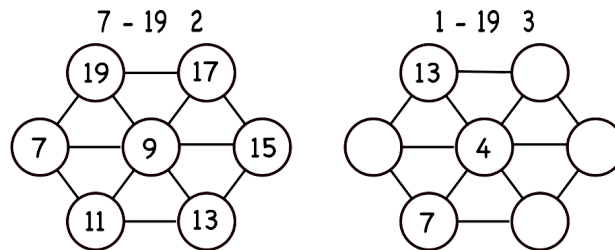
— Summendreiecke —

Summendreiecke funktionieren genau wie Differenzdreiecke, nur wird statt subtrahiert addiert. Der Wert eines Dreiecks ist die Summe seiner zwei oder drei benachbarten Quadrate. Solche Rätsel erstellst du auf die gleiche Weise wie Differenzdreiecke. Summendreiecke sind in der Regel leichter zu lösen als Differenzdreiecke.



Kapitel 4 - Inselhüpfen – Schrittzählen

Bei diesen Rätseln sind Inseln (Kreise) durch Brücken (Linien) verbunden. In dieser Variante des Inselhüpfens entstehen die Verbindungen durch Schrittzahlen. Auf einigen Inseln stehen Zahlen, andere bleiben zunächst leer. Über dem Rätsel stehen die Startzahl, die Zielzahl und die Schrittweite. Die Herausforderung besteht darin, die fehlenden Zahlen zu ergänzen und den Weg zu finden. Du kannst die Zahlen und Lücken auch auf Zettel schreiben und auf dem Boden auslegen – daraus wird ein Rätsel zum Ablaufen.

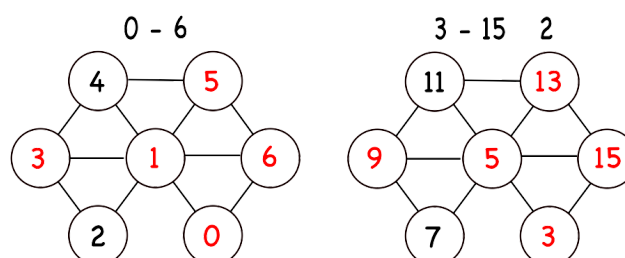


Erstelle wie bei der Aktivität Schrittzählen Rätsel zum Vorwärts- und Rückwärtszählen mit ganz verschiedenen Startzahlen, nicht nur mit Vielfachen der Schrittweite.

Diese Rätsel baust du genauso wie die Rätsel Inselhüpfen – Zählen vom Anfang des Kapitels 2. Lege zuerst die Inseln an, trage die Zahlen des Schrittzählens ein, verbinde diese Inseln in der richtigen Reihenfolge und ergänze dann ein paar zusätzliche Verbindungen, damit ein echtes Rätsel daraus wird. In der Fassung für dein Kind entfernst du einige Zahlen – aber so viele bleiben stehen, dass es sich noch herausfinden lässt.

Du kannst dir noch einmal die Bau-Strategien im Bonus-Material zu Kapitel 2 für Inselhüpfen – Zählen ansehen. Und falls du noch eines dieser Rätsel hast: Es lässt sich sehr leicht in ein Rätsel dieser Art umwandeln. Nimm das folgende Rätsel aus Kapitel 2. Darin wird von 0 bis 6 gezählt. Die roten Zahlen sind diejenigen, die man normalerweise weglässt, wenn man dem Kind das Rätsel gibt. Um daraus ein Rätsel zu machen, das bei 3 startet und in Zweierschritten zählt, multiplizierst du einfach alle Zahlen mit 2 und addierst dann 3 dazu – so wie in der Tabelle unten. Danach ersetzt du die ursprünglichen Zahlen durch die neuen (die roten natürlich weggelassen).

	0	1	2	3	4	5	6
Mal 2	0	2	4	6	8	10	12
Plus 3	3	5	7	9	11	13	15



Kapitel 4 - Reparier es

Beginnt mit einem 4-mal-4-Zahlengitter und einer Zielsumme. Die Herausforderung besteht darin, Einträge zu finden, die man streichen kann, sodass die Summe der übrigen Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte die Zielsumme ergibt. Eine andere Variante verwendet für jede Zeile und jede Spalte eine eigene Zielsumme.

Solche Rätsel baust du, indem du Paare oder Tripel von Zahlen einträgst, die zusammen die Zielsumme ergeben. Die übrigen Felder füllst du mit Zahlen zur Ablenkung. Kniffliger wird es, wenn du weitere Paare oder Tripel einbaust, die nur teilweise passen. Wenn deinem Kind das Spaß macht, es aber zu leicht findet, kannst du jederzeit größere Gitter bauen: 4 mal 5, 5 mal 5 oder noch größer.

Die roten Sterne wurden hier ergänzt, um zu zeigen, welche Einträge gestrichen werden müssen, damit die Rätsel aufgehen.

8				9				10				11			
6	3	5	2	7	4	5	2	3	3	6	4	8	3	5	4
2	1	4	5	2	1	4	6	7	1	2	6	1	1	4	7
3	4	1	3	3	4	4	1	4	6	1	4	3	8	1	3
6	4	2	5	6	4	5	3	6	4	8	2	7	5	7	4

Hier sind zwei Rätsel mit eigenen Zielsummen für Zeilen und Spalten.

6	3	7	8	16	0	6	5	2	8
2	1	4	5	9	7	8	5	4	12
3	4	7	3	10	2	7	1	4	9
5	6	3	5	11	3	1	9	8	17
11	9	18	8		9	13	14	12	

Kapitel 4 - Inselhüpfen mit Einern und Zehnern

Gegeben ist ein rechteckiges Zahlengitter, in dem einige Zahlen bereits eingetragen sind. Die Herausforderung besteht darin, die übrigen Zahlen so zu ergänzen, dass sich zwei Zahlen, die sich eine Seite teilen, nur an einer einzigen Stelle unterscheiden – und zwar um genau 1 (wobei der Übergang zwischen 0 und 9 erlaubt ist). Keine Zahl darf im gesamten Gitter mehr als einmal vorkommen. Für Anfängerinnen und Anfänger kann eine Hundertertafel eine gute Hilfe sein.

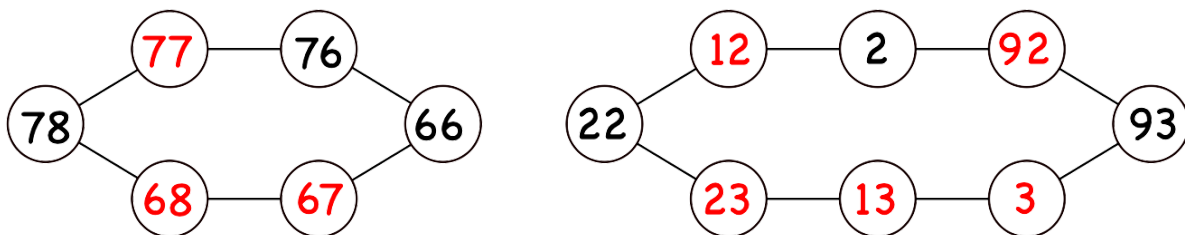
Dieses Rätsel baust du, indem du ein leeres Gitter mit Zahlen füllst, ohne eine Zahl zu wiederholen. Danach entfernst du einige Zahlen und achtest darauf, dass es für dein Kind nicht zu schwer wird. In diesen Beispielen sind die roten Zahlen die fehlenden.

57	67	66	56
5	4	94	95

33	23	13
32	22	12

Mit nur ein- und zweistelligen Zahlen lässt sich nicht viel Trickreiches einbauen. Dafür sind sie eine großartige Übung zum Nachdenken über den Stellenwert. Eine Feinheit, die dein Kind überraschen könnte, sind Übergänge wie 95 zu 5 zu 15 oder 11 zu 10 zu 0 zu 9 – ihm ist vielleicht nicht klar, dass einstellige Zahlen an der Zehnerstelle eine 0 haben, und dass 0 und 9 verbunden sind, kann es ebenfalls überraschen.

Gitter sind eine naheliegende Art, diese Aufgaben darzustellen. Die Rätsel lassen sich aber auch wie die übrigen Inselhüpfen-Rätsel mit Kreisen darstellen, und diese Darstellung gibt dir beim Erstellen zusätzliche Freiheiten.



Kapitel 4 – Solitaire Formenrätsel

— Magische Dreiecke —

Bildet ein Dreieck aus sechs Kreisen mit drei Kreisen je Seite. Setzt jede der Zahlen von 1 bis 6 genau einmal in die Kreise, sodass jede Seite des Dreiecks dieselbe Summe hat. Darin stecken zwei Herausforderungen: herauszufinden, welche Summen überhaupt funktionieren, und dann, wie man sie erreicht. Es ist besser, dein Kind selbst herausfinden zu lassen, welche Summen möglich sind – falls aber der Frust überhandnimmt: Möglich sind 9, 10, 11 und 12.

Wenn deinem Kind das Tüfteln Spaß macht, geht das auch mit größeren Dreiecken. Bei einem Dreieck mit neun Kreisen und vier Kreisen je Seite sind die Summen 17, 19, 20, 21 und 23 möglich.

Wie bei so vielen Rätseln für diese Altersgruppe geht es vor allem darum, mit Freude zu erkunden, wie Zahlen zusammenspielen, und dabei Rechensicherheit zu üben. Für ein systematisches Vorgehen fehlen deinem Kind noch die mathematischen Werkzeuge. Man kann diese Rätsel aber auch viel tiefer erkunden – hier sind einige Gedanken dazu, falls du oder ein älteres Kind Lust darauf habt.

Nennen wir SUM die Summe einer Dreiecksseite. Addierst du die drei Seiten des Dreiecks, ergibt das insgesamt $3 \times \text{SUM}$. Andererseits ist die Summe der drei Seiten auch die Summe aller Zahlen plus je einer zusätzlichen Zählung für jede Ecke des Dreiecks. Nennen wir C-SUM die Summe der Werte in den drei Ecken. Damit erhalten wir die Beziehung $3 \times \text{SUM} = (\text{Summe aller Zahlen}) + \text{C-SUM}$.

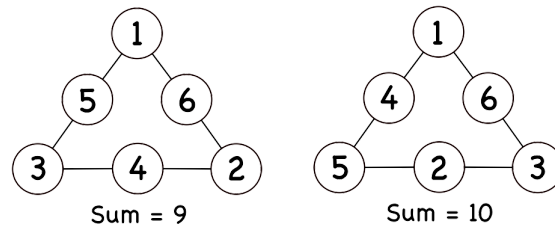
Rätsel mit 6 Kreisen. Wenden wir das auf das Dreieck mit sechs Kreisen an. Die Summe aller Zahlen ist die Summe der Zahlen von eins bis sechs, also 21. Die Gleichung lautet damit $3 \times \text{SUM} = 21 + \text{C-SUM}$. Am kleinsten kann C-SUM mit $1 + 2 + 3 = 6$ sein, am größten mit $4 + 5 + 6 = 15$. Also liegt $3 \times \text{SUM}$ zwischen $21 + 6 = 27$ und $21 + 15 = 36$. Damit muss SUM 9, 10, 11 oder 12 sein. Beachte außerdem: $\text{C-SUM} = 3 \times \text{SUM} - 21$, was praktisch ist, um die Ecken zu finden.

Auffällig ist auch die Symmetrie der möglichen Werte. Sie entsteht dadurch, dass es zu jeder Lösung eine weitere Lösung gibt, die man erhält, indem man alle Zahlen von 7 abzieht (beziehungsweise von 10 beim Rätsel mit neun Kreisen). Ein wenig Rechnen zeigt, dass diese Symmetrie aus einem Rätsel mit der Summe SUM ein neues mit der Summe $(21 - \text{SUM})$ macht (bzw. $40 - \text{SUM}$ beim Rätsel mit neun Kreisen).

Das Letzte, was vor dem Rechnen mit konkreten Zahlen auffällt: Für jede Lösung der drei Ecken dürfen wir annehmen, dass sie im Uhrzeigersinn aufsteigend angeordnet sind, mit der kleinsten Zahl oben. Ist das anfangs nicht so, kannst du die Zeichnung so lange drehen oder spiegeln, bis es passt.

All diese Beobachtungen sparen enorm viel Arbeit. Wir müssen nur noch SUM gleich 9 und 10 betrachten, und die Ecken müssen nur in aufsteigender Reihenfolge stehen. Ist SUM gleich 9, dann ist $\text{C-SUM} = 3 \times 9 - 21 = 6$, das Trio ist also 1, 2 und 3. Ist SUM gleich 10, dann gilt $a + b + c = 3 \times 10 - 21 = 9$. Damit bleiben zwei Möglichkeiten: Eckwerte 1, 2 und 6 oder 1, 3 und 5. Ein kurzer Versuch schließt 1, 2 und 6 aus.

Nach einiger Arbeit haben wir die Lösungen für SUM gleich 9 und 10 beim Rätsel mit sechs Kreisen. Denk daran: Die Lösungen für SUM gleich 11 und 12 bekommst du, indem du alle Einträge von 7 abziehst.



Rätsel mit 9 Kreisen. Beim Rätsel mit 9 Kreisen gehst du genauso vor. Die Summe der Zahlen von 1 bis 9 ist 45. Also gilt $3 \times \text{SUM} = 45 + \text{C-SUM}$. Am kleinsten kann C-SUM mit $1 + 2 + 3 = 6$ sein, am größten mit $7 + 8 + 9 = 24$. Damit liegt $3 \times \text{SUM}$ zwischen $45 + 6 = 51$ und $45 + 24 = 69$, sodass SUM zwischen 17 und 23 liegen muss. Zieht man bei einer Lösung alle Einträge von 10 ab, ergeben sich folgende SUM-Paare: 17 - 23, 18 - 22, 19 - 21 und 20 - 20. Lösungen werden also nur für 17, 18, 19 und 20 gebraucht. Die zugehörigen Werte für C-SUM sind 6, 9, 12 und 15.

SUM = 17 und C-SUM = 6. Dafür müssen die Ecken 1, 2, 3 sein – und es funktioniert.

SUM = 18 und C-SUM = 9. Dafür müssen die Ecken entweder 1, 2, 6 oder 1, 3, 5 sein. Keines von beiden funktioniert.

SUM = 19 und C-SUM = 12. Für die Ecken gibt es einige Möglichkeiten, aber nur 1, 4, 7 und 2, 3, 7 funktionieren.

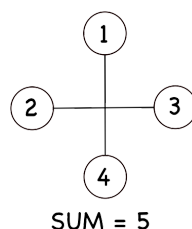
SUM = 20 und C-SUM = 15. Für die Ecken gibt es zu viele Kombinationen, und viele davon funktionieren. Zwei, die klappen, sind 1, 5, 9 und 2, 5, 8.

— Magische Muster —

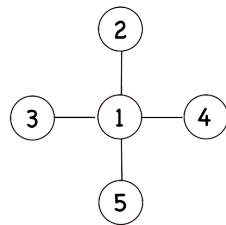
Ähnlich wie bei den Magischen Dreiecken sind hier Kreise in einem geometrischen Muster verbunden, dazu gibt es eine Gruppe von Zahlen. Setzt die Zahlen so in die Kreise, dass jede gerade Linie verbundener Kreise dieselbe Summe hat.

Die Analyse dieser Rätsel läuft ähnlich wie bei den Magischen Dreiecken. Nennen wir SUM die gemeinsame Summe aller Reihen und c den Wert des mittleren Kreises, sofern es einen gibt. Die allgemeine Strategie besteht darin, alle Reihen zu addieren und die Beziehung zu untersuchen, die sich dabei zeigt. Beachte außerdem: Genau wie bei den Magischen Dreiecken entsteht eine neue Lösung, wenn man alle Einträge von einer Zahl abzieht, die um eins größer ist als die größte verwendete Zahl.

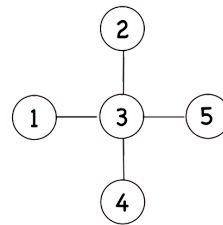
1. Die Zahlen von 1 bis 4 liegen in einer Pluszeichen-Form ohne gemeinsame Kreise. Die Zahlen 1 bis 4 ergeben zusammen 10, und das teilt sich gleichmäßig auf die beiden Richtungen auf. Also ist SUM = 5 und die Antwort ist leicht.



2. Die Zahlen von 1 bis 5 liegen in einem Pluszeichen mit einem gemeinsamen Kreis in der Mitte. Die Zahlen 1 bis 5 ergeben zusammen 15. Addiert man beide Richtungen, erhält man $2 \times \text{SUM} = 15 + c$. Weil $15 + c$ gerade sein muss, kann c gleich 1, 3 oder 5 sein. Die Lösung für $c = 5$ ($\text{SUM} = 10$) erhältst du aus der Lösung für $c = 1$, indem du alle Zahlen von 6 abziehst.

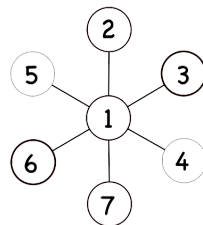


$$c = 1 \quad \text{SUM} = 8$$

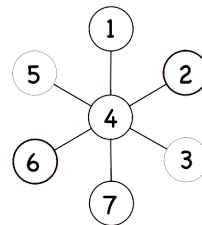


$$c = 3 \quad \text{SUM} = 9$$

3. Die Zahlen von 1 bis 7 liegen in Linien aus 3 Kreisen mit einem gemeinsamen Kreis in der Mitte. Addiert man die drei Richtungen, erhält man $3 \times \text{SUM} = 28 + 2 \times c$. Weil 3 die Zahl $28 + 2 \times c$ ohne Rest teilen muss, kommt für c nur 1, 4 oder 7 in Frage. Die Lösungen für $c = 1$ und 4 sind angegeben.

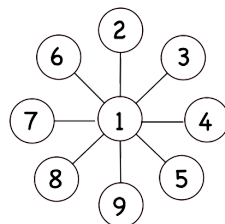


$$c = 1 \quad \text{SUM} = 10$$

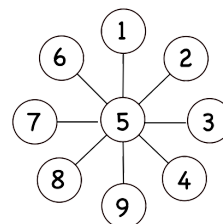


$$c = 4 \quad \text{SUM} = 12$$

4. Die Zahlen von 1 bis 9 liegen in Linien aus 3 Kreisen mit einem gemeinsamen Kreis in der Mitte. Addiert man die vier Richtungen, erhält man $4 \times \text{SUM} = 45 + 3 \times c$. Weil 4 die Zahl $45 + 3 \times c$ ohne Rest teilen muss, kommt für c nur 1, 5 oder 9 in Frage.



$$c = 1 \quad \text{SUM} = 12$$

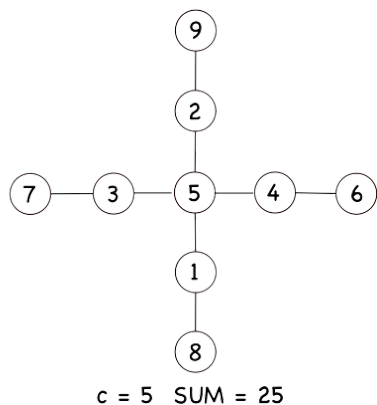
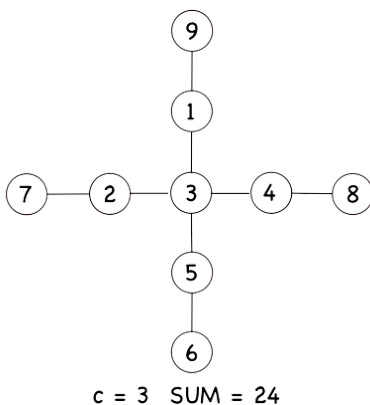
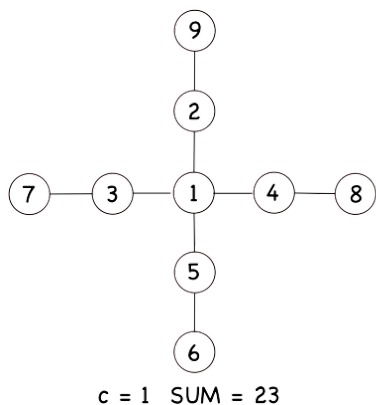


$$c = 5 \quad \text{SUM} = 15$$

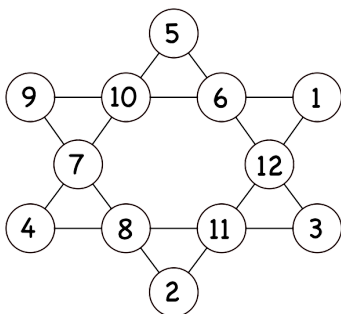
5. Die Zahlen von 1 bis 5 liegen in einer L-Form mit einem gemeinsamen Kreis in der Ecke. Das ist im Grunde dieselbe Aufgabe wie Nummer 2, die Lösungen sind also im Wesentlichen dieselben.

6. Die Zahlen von 1 bis 8 liegen in einem Pluszeichen ohne gemeinsame Kreise. Die beiden Richtungen teilen sich 36, die Summe aller Zahlen, gleichmäßig auf – also ist $\text{SUM} = 18$. Es gibt viele Lösungen, indem man die Zahlen in zwei Gruppen aufteilt, die jeweils 18 ergeben. Eine Lösung ist 1, 2, 7, 8 und 3, 4, 5, 6, eine andere 1, 3, 6, 8 und 2, 4, 5, 7.

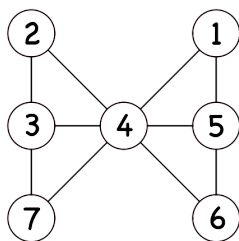
7. Die Zahlen von 1 bis 9 liegen in einem Pluszeichen mit einem gemeinsamen Kreis in der Mitte. Addiert man die beiden Richtungen, erhält man $2 \times \text{SUM} = 45 + c$, also $c = 1, 3, 5, 7$ oder 9 . Die Lösungen für $c = 1, 3$ und 5 sind angegeben.



8. Die Zahlen von 1 bis 12 liegen in einer Sternform. Diese hat 6 Richtungen mit Linien aus je 4 Kreisen. Diese Aufgabe ist deutlich schwerer als die übrigen. Addierst du alle Richtungen, kommt jede Zahl zweimal vor. Die Zahlen von 1 bis 12 ergeben zusammen 78. Damit gilt $6 \times \text{SUM} = 2 \times 78$, also $\text{SUM} = 26$ (wie im Tipp angegeben). Unten steht eine Lösung. Wie immer erhältst du eine weitere Lösung, indem du alle Einträge von 13 abziehst.



9. Die Zahlen von 1 bis 7 liegen in einer H-Form – 3 senkrecht links, 1 in der Mitte, 3 senkrecht rechts. Es gibt 5 mögliche Linien aus 3 verbundenen Kreisen. Addiert man die 5 Richtungen, wird jeder Kreis zweimal verwendet, außer dem mittleren, der dreimal vorkommt. Das ergibt $5 \times \text{SUM} = 2 \times 28 + c$. Weil 5 die Zahl $56 + c$ ohne Rest teilen muss, bleibt nur $c = 4$, und dann ist $\text{SUM} = 12$ (wie im Tipp angegeben). Beachte, dass weder 2 noch 3 auf derselben Seite wie die 1 liegen können – daraus ergibt sich die folgende Lösung.



Kapitel 4 - Summenquadrat

Beginnt mit einem 3-mal-3-Gitter, bei dem für jede Zeile und jede Spalte eine Zielsumme angegeben ist. Einige der Zahlen von 1 bis 9 stehen bereits im Gitter. Die Herausforderung besteht darin, die noch nicht platzierten Zahlen so einzusetzen, dass die Zeilen- und Spaltensummen den Zielwerten entsprechen.

Für ein solches Rätsel legst du zuerst Zettel mit den Zahlen von 1 bis 9 auf ein 3-mal-3-Gitter. Für jede Zeile und jede Spalte schreibst du die Summe rechts daneben oder darunter. Danach nimmst du einige Zahlen aus dem Gitter heraus. Zum Schluss gibst du deinem Kind die entfernten Zettel und fragst: „Wo lagen diese hier?“ Weil sich diese Rätsel so leicht erstellen lassen, eignen sie sich hervorragend dafür, dass dein Kind welche für dich baut.

Eine Variante mit etwas kleineren Summen verwendet die Zahlen von 0 bis 8. Schwieriger wird es mit den Zahlen 1 bis 12 in einem 3-mal-4-Gitter oder sogar 1 bis 16 in einem 4-mal-4-Gitter.

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

Das vollständig ausgefüllte Ausgangsrätsel zu bauen ist einfach genug: Wie oben beschrieben trägst du einfach alle Zahlen ein und schreibst die Summen dazu. Die Herausforderung für die erstellende Person besteht darin, genau die richtige Menge an Information wegzunehmen, damit das Rätsel fordernd, aber nicht zu schwer wird.

Strategien zum Lösen und Erstellen: Fang mit den Feldern an, in denen die einzige fehlende Zahl einer Zeile oder Spalte steht. Das linke der drei Rätsel ist recht leicht zu lösen: Sind erst die 5 und die 7 eingetragen, folgen leicht die 3 und die 2, und zuletzt ist die 8 einfach – jede gelöste Einzelstelle erzeugt neue Einzelstellen, die sich leicht ausrechnen lassen.

Leicht zu berechnende Rätsel sind gute Übung für dein Kind – du musst also nicht jedes Rätsel knifflig machen.

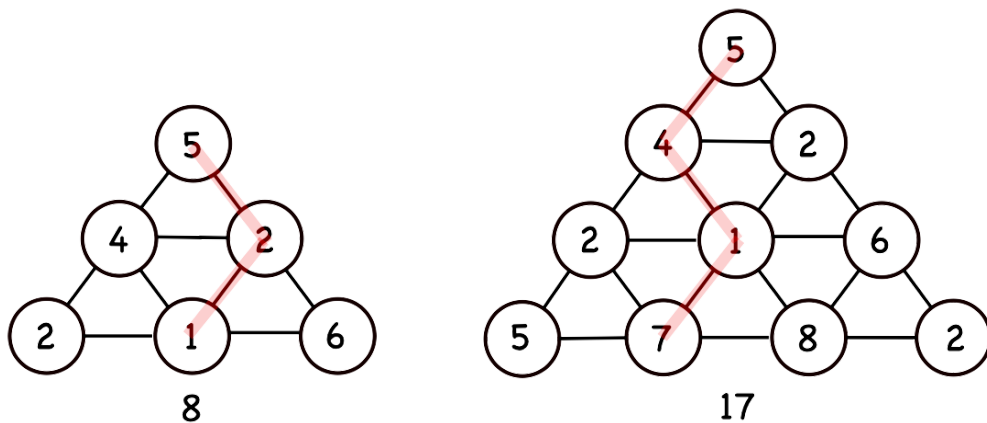
Das mittlere Rätsel ist etwas schwerer. Es gibt keine Einzelstellen. Eine gute Strategie ist dann, nach Zeilen oder Spalten mit besonders großen oder kleinen fehlenden Summen zu suchen – dort gibt es vergleichsweise wenige Möglichkeiten. Die untere Zeile und die rechte Spalte sind bei diesem Rätsel gute Startpunkte. Die fehlenden Zahlen der unteren Zeile ergeben zusammen 16, also müssen es 7 und 9 sein. Die 9 kann nicht in die Spalte mit der 6 (die Summe wäre für diese Spalte zu groß), damit sind 7 und 9 gesetzt. Der Rest ergibt sich wie beim vorherigen Rätsel.

Beim rechten Rätsel fehlen zwei der Randzahlen. Sobald dein Kind erkennt, dass die Randzahlen zusammen 45 ergeben – die Summe der Zahlen von 1 bis 9 –, lässt sich eine einzelne fehlende Randzahl leicht ergänzen.

Kapitel 4 - Additionspyramide

Gegeben ist eine Pyramide aus 10 Zahlen in 4 Reihen sowie eine Zielzahl. Die Herausforderung besteht darin, einen Weg durch die Pyramide zu finden, der aus jeder Reihe eine Zahl verwendet, sodass die Summe dieser Zahlen die Zielzahl ergibt. Die Zahlen auf dem Weg müssen einander berühren.

Ein solches Rätsel baust du, indem du zuerst die Zahlen einträgst, die den Weg bilden sollen, und deren Summe notierst. Anschließend füllst du die restliche Pyramide mit Lockzahlen. Mit jeder zusätzlichen Reihe verdoppelt sich die Zahl der möglichen Wege – größere Pyramiden sind also genau richtig für ein Kind, dem das Rätsel mit 10 Zahlen zu leicht fällt. Findet dein Kind die 10-Zahlen-Pyramide dagegen schwierig, fangt mit 6 Zahlen an, bis es leicht und schnell geht.



Bei größeren Rätseln kann es für die erstellende Person schwierig sein sicherzustellen, dass es nur einen richtigen Weg durch die Pyramide gibt. Mach dir darüber nicht zu viele Gedanken. Auch wenn ein einziger Weg schön wäre – dein Kind wird es genießen, dir zu zeigen, dass es mehr als eine Lösung gibt.

Kapitel 4 - Untersuchungen

— BLÜTENBLÄTTER —

Untersuchung

In einem Zaubergarten gibt es zwei Arten von Blumen. Die eine hat 4 Blütenblätter, die andere 7. Ein Kind sollte so viele Blumen pflücken, dass die Gesamtzahl der Blütenblätter 13 beträgt. Ging das? Und wie sieht es mit 15 Blütenblättern aus? Bei welchen Blütenblattzahlen ist es möglich? Und wenn es möglich ist – geht es auch auf mehr als eine Weise? 32 Blütenblätter sind zum Beispiel vier Siebener und ein Vierer, aber auch acht Vierer.

Wenn du viele Zahlenpaare durchprobierst, gibt es jede Menge Beispiele zum Spielen. Bei manchen Paaren kommt ein Punkt, ab dem alle Blütenblattzahlen möglich sind, bei anderen Paaren gibt es diesen Punkt nicht. Für 4 und 7 ist jede Zahl ab 18 möglich. Für 3 und 6 gibt es keinen Punkt, ab dem alle Zahlen vorkommen.

Was ist das Muster, und wodurch entsteht es? Das sind Fragen, die oft auftauchen – und genau dort passieren viele spannende Dinge.

Am leichtesten zu durchschauen ist der Fall, in dem eine Zahl beide Zahlen ohne Rest teilt. Nimm zum Beispiel 3 und 6. Denk dir diese Zahlen als 1×3 und 2×3 . Addierst du solche Zahlen, kommt immer eine bestimmte Anzahl von Dreiern heraus. Es gibt keine Möglichkeit, aus Dreiern und Sechsern die 10 zu bilden, weil 10 kein Vielfaches von 3 ist.

Wenn 1 die einzige Zahl ist, die beide Zahlen ohne Rest teilt, gibt es immer einen Punkt, ab dem jede Zahl erreichbar ist. Für 4 und 7 ist das die 18. Um diese Zahl zu finden, ziehst du von jeder der beiden Zahlen 1 ab und multiplizierst die neuen Zahlen miteinander. Hier ergibt das $3 \times 6 = 18$. Ein weiterer interessanter Aspekt: Genau die Hälfte der Zahlen unterhalb von 18 ist erreichbar. Warum das so ist, erfordert Mathematik, die für ein kleines Kind noch zu anspruchsvoll ist – aber es macht Spaß, mit diesen Rechnungen zu spielen, und die Erfahrungen deines Kindes mit solchen Mustern fügen sich vielleicht viel später plötzlich zusammen.

— TREPPENSTEIGEN – WIE VIELE WEGE —

Untersuchung

Angenommen, dein Kind nimmt manchmal gern zwei Stufen auf einmal, manchmal aber auch nur eine. Wenn es eine Treppe hinaufgehen will, stellt sich ganz natürlich die Frage: Auf wie viele Arten geht das?

Bei 0 Stufen gibt es zum Beispiel genau eine Möglichkeit – du bleibst einfach stehen. Bei 1 Stufe gibt es eine Möglichkeit: einen einzelnen Schritt. Bei zwei Stufen kannst du entweder einen Doppelschritt oder zwei Einzelschritte machen.

Dein Kind sollte viele solcher Fälle sorgfältig abzählen und die Ergebnisse in einer Tabelle festhalten. Bei vielen Informationen hilft eine Tabelle oft dabei, Ordnung zu schaffen und Muster sichtbar zu machen. Die Tabelle sähe so aus (gut, über 6 hinaus braucht es vielleicht zu viel Geduld, aber hier sind die Zahlen):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Beim Betrachten dieser Zahlen fällt deinem Kind vielleicht auf, dass je zwei aufeinanderfolgende Zahlen zusammen die nächste Zahl ergeben. Warum ist das so? Diese Zahlen heißen Fibonacci-Zahlen. Die Regel für die echten Fibonacci-Zahlen lautet, dass jede Zahl die Summe der beiden vorhergehenden ist. Genau das passiert auch beim Treppensteigen. Hmmm ...

Schauen wir uns ein Beispiel genauer an – sagen wir 5 Stufen. Die 8 Möglichkeiten sind: 1+1+1+1+1, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 1+1+1+2, 1+2+2 und 2+1+2. Bei den ersten 5 Möglichkeiten ist der letzte Schritt eine 1, bei den letzten 3 eine 2. Damit ist es erklärt: Du kommst 5 Stufen hinauf, indem du entweder 4 Stufen hinaufgehst und noch einen Schritt machst, oder indem du 3 Stufen hinaufgehst und dann zwei Stufen auf einmal nimmst. Die Anzahl der Wege für 5 Stufen ist also genau die Summe aus der Anzahl der Wege für 4 Stufen und der Anzahl der Wege für 3 Stufen.

Muster versteht man oft, indem man geduldig Beispiele durchgeht, die Daten ordnet, sie genau anschaut und nach Erklärungen dafür sucht, warum die Dinge so laufen, wie sie laufen. Das ist eine gute Gewohnheit, die du bei deinem Kind fördern kannst.

— BALKENWAAGE —

Untersuchung

Eine Balkenwaage ist ein einfaches Gerät, mit dem man feststellen kann, ob zwei Dinge genau gleich schwer sind. Meist gehört ein Satz Gewichte dazu, mit dem man das Gewicht anderer Gegenstände bestimmt. Es gibt viele spannende Erkundungen, wenn du einschränkst, welche Gewichte verwendet werden dürfen.

Eine Sorte Gewichte: Angenommen, du hast viele Gewichte, aber alle sind gleich – sagen wir 5 Einheiten. Dann kannst du nur Gegenstände genau abwägen, deren Gewicht ein Vielfaches von 5 ist (genau wie beim Zählen in Fünferschritten).

Zwei Sorten Gewichte – eine Seite: Angenommen, du hast viele Gewichte mit entweder 4 oder 7 Einheiten und legst sie nur auf eine Seite der Waage. Abwiegen kannst du dann genau die Zahlen, die du bei der Erkundung mit den Blütenblättern gefunden hast. Bei 4 und 7 kannst du ab 18 Einheiten alles genau abwägen. Sind die Gewichte 4 und 6 Einheiten schwer, kannst du nur gerade Zahlen ab 4 abwägen.

Zwei Sorten Gewichte – beide Seiten: Nach der Erkundung mit zwei Gewichtssorten auf einer Seite ist dein Kind vielleicht überrascht, wenn du es bittest, mit Vierern und Siebenern einen Gegenstand von 3 Einheiten oder sogar von 1 Einheit abzuwiegen. Der Trick besteht darin, einige Gewichte auf die eine und andere auf die andere Seite zu legen. Prüfe zum Beispiel, ob ein Gegenstand 3 Einheiten wiegt, indem du ihn zusammen mit einem 4er-Gewicht auflegst und schaust, ob es sich mit einem 7er-Gewicht ausgleicht. Ebenso prüfst du 1 Einheit, indem du den Gegenstand mit einem 7er-Gewicht auflegst und schaust, ob zwei 4er-Gewichte das Gleichgewicht herstellen.

In dieser Erkundung steckt ein wichtiger mathematischer Satz, das Lemma von Bézout. Dein Kind muss davon jetzt noch nichts wissen – aber ist es nicht toll, dass ein kleines Kind hier mit fortgeschrittener Mathematik herumspielt!

Verdoppelnde Gewichte: Was passiert, wenn du von jedem Gewicht der Verdopplungsreihe 1, 2, 4, 8 und 16 genau eines hast? Auf wie viele Arten kannst du etwas abwiegen, das 13 wiegt? Und was ist das größte Gewicht, das du messen kannst?

Nach einigem Erkunden wirst du feststellen, dass du alles bis zu eins weniger als dem Doppelten des größten Gewichts abwiegen kannst – hier also bis 31. Außerdem lässt sich jeder abwiegbare Gegenstand nur auf genau eine Weise abwiegen: $13 = 1 + 4 + 8$ zum Beispiel, und es gibt keinen anderen Weg. Ziemlich cool! Diese Situation hängt mit dem Binärsystem zusammen.

Fibonacci-Gewichte: Was passiert, wenn die Gewichte den Fibonacci-Zahlen entsprechen? Gibt es für manche Gewichte mehr als einen Weg? Findet eine Einschränkung, durch die es für jedes Gewicht nur einen einzigen Weg gibt.

Angenommen, du hast je ein Gewicht mit 1, 1, 2, 3, 5, 8 und 13. Damit gilt $10 = 2 + 3 + 5 = 2 + 8 = 1 + 1 + 3 + 5 = 1 + 1 + 8$. Die Mehrdeutigkeit entsteht, weil die Fibonacci-Regel mehrere Wege schafft, Fibonacci-Zahlen durch sich selbst auszudrücken – zum Beispiel $2 = 1 + 1$ und $8 = 5 + 3$. Man behebt das, indem man verlangt, dass keine zwei Fibonacci-Zahlen verwendet werden dürfen, die in der Folge direkt nebeneinanderstehen. Mit dieser Einschränkung ist $2 + 8$ der einzige Weg zur 10.